ZO! WIL IK LEREN REKENEN

ZO! WIL IK LEREN REKENEN

Rijke rekenlessen voor groep 6, 7 en 8

Frans van Galen, Annette Markusse, Lia Oosterwaal en Nisa Figueiredo

uitgeverij van gorcum

2026

NUR 846

ISBN folio 9789465070483
ISBN e-book 9789465070803

Eerste druk, 2026
Dit is een speciale uitgave bij het tijdschrift Volgens Bartjens.
Een deel van de lessen is eerder beschreven in de rubriek 'Zo! wil ik leren rekenen'.

Uitgave: Uitgeverij Van Gorcum, Assen
Redactie: Kirsten Verhagen, Paterswolde
Grafische verzorging en omslagontwerp: FIZZ | Digital Agency, Zwolle
Druk: Drukkerij Van Gorcum, Meppel

Verantwoording beeldmateriaal
Voor alle in deze uitgave opgenomen foto's van klassensituaties in het
basisonderwijs is toestemming verkregen van de betrokkenen en, waar van
toepassing, hun ouders/verzorgers. Foto's en afbeeldingen
zijn eigendom van de auteurs, m.u.v.:
Foto blz. 78 (bewerkt): Shutterstock
Afbeelding 4.8 (bewerkt), blz. 76: TNO

Inhoud

Voorwoord

Een overkoepelend doel van het reken-wiskundeonderwijs is het bevorderen van de maatschappelijke redzaamheid van kinderen. Vlot en vaardig leren rekenen is daarvoor natuurlijk nodig, maar niet voldoende; ook inzicht, begrip en een positieve houding ten aanzien van rekenen-wiskunde zijn onontbeerlijk. De vraag hoe we deze rijkere elementen in het reken-wiskundeonderwijs kunnen ontwikkelen speelt al langer, maar is met de publicatie van de nieuwe kerndoelen rekenen en wiskunde (SLO, 2025)[1] nog relevanter geworden. Daarin spelen wiskundige denk-werkwijzen en wiskundige attitude een belangrijke rol. Om hieraan in samenhang met wiskundige concepten te werken zijn handvatten voor de onderwijspraktijk zeer welkom.

Zo! wil ik leren rekenen biedt leraren en leraren in opleiding inspiratie om rijke rekenlessen in de bovenbouw te verzorgen. Deze lessen worden al enige tijd gemaakt en uitgegeven onder de vlag van het vakblad *Volgens Bartjens*, maar voor je ligt een prachtig boek met een zeer rijke verzameling. Na een inleidend hoofdstuk beschrijven de auteurs 26 lesplannen voor de verschillende leerstofdomeinen. Elke les bevat een uitgebreide beschrijving van de opzet, het mogelijke verloop en aandachtspunten. Daarbij, en dat is een van de grootste troeven van dit boek, zijn bij bijna alle lessen ook video's beschikbaar van de uitwerking in de praktijk. Hierdoor komen de lesplannen nog meer tot leven en krijgt de lezer heel concreet inzicht in hoe rijke rekenlessen kunnen uitpakken in de klas, zichtbaar in de reacties van kinderen en het handelen van de leerkracht.

Bij de lesplannen draait het voortdurend om het stimuleren van inzicht, gekoppeld aan nieuwe kerndoelen en in het bijzonder de wiskundige attitude. Open problemen waaraan iedereen kan beginnen en waarvoor veel verschillende aanpakken mogelijk zijn (*low floor high ceiling*) nemen hierin een centrale plaats in. Deze problemen zijn van uiteenlopende aard, maar beschrijven stuk voor stuk betekenisvolle situaties uit de belevingswereld van kinderen of uit de wiskunde zelf. Sommige problemen in de lesplannen zijn nieuw, andere zijn eerder elders beschreven (bijvoorbeeld tijdens de Grote Rekendag of in materiaal van Wiskobas), maar alle problemen lokken probleemoplossende vaardigheden uit en, zo blijkt uit de filmpjes, enthousiasme en interesse bij de leerlingen en leerkrachten. Lesgeven vanuit open problemen vraagt van leerlingen en leerkrachten om extra aandacht te besteden aan het verwoorden van en luisteren naar elkaars oplossingsstrategieën. De auteurs geven hiervoor in de lesplannen gerichte aanwijzingen. De geboden structuur – probleem neerzetten, in tweetallen werken, tussentijdse bespreking en klassikale bespreking en reflectie – biedt daarbij houvast.

Wij hopen dat deze rijke rekenlessen hun weg naar de basisschoolpraktijk vinden, zodat veel kinderen de mogelijkheid krijgen om hun probleemoplossende vaardigheden en wiskundige attitude te ontwikkelen.

Michiel Veldhuis en Jenneken van der Mark

Secretaris en voorzitter NVORWO

Hoofdstuk 1

Over dit boek

Stimuleren van inzicht
Wat is het verband tussen breuken en procenten? Waarom berekenen we oppervlakte via een vermenigvuldiging? Waarom is het bij het tekenen van een grafiek belangrijk hoe je de assen indeelt? Hoe kan een kijklijn helpen om te begrijpen wat je wel en niet kunt zien? Aan de vaardigheden die leerlingen leren in de reken-wiskundelessen liggen allerlei fundamentele wiskundige ideeën ten grondslag. Het is belangrijk dat leerlingen zich die ideeën eigen maken, dat ze inzicht ontwikkelen.

Dat wiskundig inzicht belangrijk is, daar is iedereen het over eens, maar over de vraag hoe we de ontwikkeling van inzicht het best kunnen stimuleren, verschillen de meningen. Is het voldoende als de leerkracht een berekening voordoet en daarbij helder uitlegt waarom je zo rekent? Wij denken van niet. Inzicht ontstaat als leerlingen zelf actief zijn: als ze ideeën onderzoeken, als ze strategieën uitproberen en vergelijken, als ze hun gedachten verwoorden in relatie tot die van anderen. Juist in dit proces ontwikkelen zij het begrip en de vaardigheden die nodig zijn om verder te komen in het leren van rekenen-wiskunde.

De nieuwe kerndoelen benadrukken dit ook. Leerlingen moeten niet alleen rekenvaardigheden beheersen, ze moeten ook een wiskundige attitude ontwikkelen. Dat gebeurt als leerlingen gestimuleerd worden om nieuwsgierig te zijn, vragen te stellen, verschillende strategieën uit te proberen en verbanden te leggen. Deze houding helpt hen om inzicht en diep begrip op te bouwen. De taak van de leerkracht is om de leerlingen te ondersteunen in dit proces.

Open problemen
In de reguliere reken-wiskundemethodes vind je vooral opgaven die gesloten zijn, in de zin dat vooraf al duidelijk is op welke manier ze moeten worden opgelost. Een breukenprobleem los je op via de procedures die je voor breuken geleerd hebt en een verhoudingenprobleem via een verhoudingstabel. Daarmee wordt sterk aangestuurd op één aanpak.

In een rijke rekenles worden leerlingen niet gestuurd naar een vaste route, maar krijgen ze juist de ruimte om verschillende wiskundige ideeën te verkennen. We kiezen in dit boek voor open ‘problemen’: problemen vanuit een herkenbare context die leerlingen op verschillende manieren kunnen aanpakken. Het kan betekenen dat sommige leerlingen een verhoudingstabel gaan maken, terwijl andere leerlingen het probleem oplossen via een aanpak met breuken. Deze openheid maakt het probleem meer betekenisvol, doordat de aanpak uit de leerlingen zelf komt, maar ook rijker in de zin dat leerlingen ervaren dat er verschillende, gelijkwaardige aanpakken mogelijk zijn. Tegelijkertijd stimuleert het hun wiskundige attitude: nieuwsgierig onderzoeken, vragen stellen, zelf oplossingen verkennen en hun eigen denkproces kritisch bekijken.

Die open problemen zijn ontworpen voor álle leerlingen in de groep. Het zijn problemen met een *low-floor-high-ceiling* karakter[2]: iedere leerling kan instappen door simpelweg iets te proberen, bijvoorbeeld door met materiaal te experimenteren, een schets te maken of een eerste gok te wagen. Tegelijkertijd bieden de problemen mogelijkheden voor leerlingen die op een hoger abstractieniveau kunnen redeneren. Zo krijgt iedere leerling toegang tot betekenisvolle wiskunde op zijn eigen niveau.

Een les rond een open probleem zal, als het goed is, worden afgesloten met een duidelijke conclusie. Het probleem is dan opgelost. Maar de rijkdom van de les zit vooral in het proces ervoor: in de discussie die het probleem heeft opgeroepen, de uitwisseling van verschillende redeneringen en oplossingsstrategieën en in de onderliggende wiskundige ideeën die daarbij aan bod komen. Het is dus goed om aan het eind van de les terug te kijken en met de leerlingen te bespreken welke nieuwe ideeën aan de orde zijn gekomen.

Het geven van een rijke rekenles vanuit een open probleem vraagt heel wat van een leerkracht. Je kunt immers maar tot op zekere hoogte voorzien welke reacties het probleem zal oproepen. Daarom is een gedegen voorbereiding belangrijk: je moet helder voor ogen hebben welke wiskundige ideeën aan bod komen, welke discussies je wilt stimuleren en hoe je verschillende oplossingsstrategieën kunt begeleiden. Daarnaast is het belangrijk dat je kunt inspelen op de inbreng van leerlingen, begrijpt waar hun ideeën vandaan komen en hoe je deze op een hoger plan kunt brengen. Je zult dus moeten beschikken over een breed vakdidactisch repertoire. Je krijgt hierbij een uitgebreide ondersteuning. Dit boek biedt via achtergrondteksten, concrete lesplannen en video-opnamen heldere handvatten om je te helpen bij dit proces.

De openheid maakt het geven van zulke rijke lessen juist heel interessant. Je ervaart hoe leerlingen verschillend kunnen denken en merkt bovendien dat ze vaak veel meer kunnen dan je verwachtte. Ga met de leerlingen op avontuur. Zorg dat ze begrijpen om welk probleem het gaat, maar laat het daarna aan hen om mogelijke oplossingen te vinden. Zo ontstaat een rijke groepscultuur waarin denken, redeneren en ontdekken centraal staan en de wiskundige attitude van de leerlingen wordt versterkt.

De winst van dit soort lessen is groot. Doordat leerlingen diepgaand begrip ontwikkelen, hebben ze minder moeite met het oefenen van vaardigheden. Waar ze eerder vaak ‘Hoe moet dat?’ vroegen, kunnen ze dankzij hun inzicht opdrachten beter en zelfstandiger uitvoeren. Uiteindelijk levert dit tijdwinst op, en bovendien zorgt het voor verdieping, verwondering en vooral veel plezier in de rekenles.

Lesgeven vanuit open problemen

Dit boek biedt een verzameling lessen rond open problemen voor groep 6, 7 en 8. De lessen, die stuk voor stuk door ervaren leerkrachten zijn uitgeprobeerd, moeten gezien worden als aanvulling op de lessen van de reguliere methode. De gekozen problemen zijn bedoeld om discussie over onderliggende wiskundige ideeën uit te lokken.

In het boek en op de bijbehorende website op vangorcumstudie.nl vind je al het materiaal dat je nodig hebt voor het geven van de lessen. Bij de achtergrondtekst van elke les staat een QR-code vermeld die toegang geeft tot de website. Hier vind je onder andere de werkbladen voor de leerlingen en powerpointpresentaties. Ook kun je hier van de meeste lessen video-opnamen bekijken. Je ziet daarin hoe leerlingen reageren en hoe de leerkracht ingaat op die reacties. Dit alles kan je inspireren bij het vormgeven van je eigen lessen.

De video’s tonen een diversiteit aan leerkrachten en scholen, zodat je een breed beeld krijgt van manieren waarop je leerlingen kunt stimuleren na te denken over de wiskunde achter rekenopgaven. Je ziet verschillen in aanpak bij de leerkrachten, maar waarschijnlijk ook veel overeenkomsten. Het hiernavolgende lijstje geeft enkele van die overeenkomsten weer. We nodigen je uit om ook zelf op zoek te gaan naar de gemeenschappelijke deler en het lijstje verder aan te vullen.

- De leerlingen worden aangemoedigd om hun redeneringen hardop te verwoorden en met elkaar te vergelijken. Een leerling legt bijvoorbeeld uit hoe zij een probleem aanpakt en krijgt direct feedback van klasgenoten, die aanvullende ideeën geven of vragen stellen.
- De leerkrachten luisteren met aandacht en proberen de redeneringen van leerlingen te begrijpen. De leerkracht vat bijvoorbeeld de woorden van een leerling samen om te controleren of de uitleg goed wordt begrepen, en vraagt vervolgens door, bijvoorbeeld met: ‘Waarom denk je dat?’
- De leerkrachten zorgen ervoor dat de andere leerlingen in de groep de redenering van een kind kunnen volgen. Dat kan door zelf de redenering van dat kind in andere woorden weer te geven of door de redenering samen te vatten op het bord, maar ook door een andere leerling te vragen dat te doen.
- De leerkrachten stimuleren leerlingen niet alleen om hun eigen ideeën te delen, maar ook actief in te gaan op de gedachten van klasgenoten, zodat er een gezamenlijk begrip ontstaat. De leerkracht vraagt bijvoorbeeld: ‘Wat vinden jullie van deze aanpak?’ of ‘Wie ziet iets anders of kan iets toevoegen aan wat al is gezegd?’
- De leerkrachten besteden aandacht aan het taalgebruik en het gebruik van wiskundige termen. Ze vragen leerlingen bijvoorbeeld om specifieke termen te gebruiken, zoals ‘verhouding’ of ‘lijngrafiek’, en moedigen hen aan om hun aanpak nauwkeurig onder woorden te brengen. Hierdoor groeien de wiskundige woordenschat en het begrip van de leerlingen.
- De leerkrachten bevorderen een cultuur waarin leerlingen zich vrij voelen om fouten te maken en deze openlijk te bespreken. Ze stimuleren leerlingen om samen te reflecteren op wat er misging en te kijken naar hoe ze hun aanpak kunnen verbeteren.
- De leerkrachten moedigen leerlingen aan om te reflecteren op hun eigen leerproces. Aan het eind van de les vragen ze de leerlingen onder woorden te brengen wat ze hebben geleerd.
- De leerkrachten bevorderen een wiskundige attitude. Ze zijn een rolmodel en laten zien hoe je nieuwsgierig, onderzoekend en kritisch met wiskunde omgaat. Ze moedigen leerlingen aan vragen te stellen, verschillende oplossingsstrategieën uit te proberen en kritisch te zijn. Door dit actief te begeleiden helpen ze leerlingen een onderzoekende, doorzettende en reflectieve houding te ontwikkelen.

Zoals het voorgaande lijstje laat zien, vragen open problemen om een andere rol van de leerkracht. Je bent vooral gespreksleider: je bewaakt de focus van het gesprek, maar laat de aanpak zoveel mogelijk bij de leerlingen. Je stelt je naast hen op, geeft niet direct inhoudelijk commentaar en nodigt andere leerlingen uit om te reageren. Tegelijkertijd stuur je het proces met gerichte vragen of een hint wanneer het gesprek dreigt vast te lopen, zonder de oplossing weg te geven.

Achtergrondtekst en lesplannen
Bijna alle lessen in dit boek beginnen met een achtergrondtekst die de context schetst: om welke lesstof het gaat en wat de wiskundige ideeën zijn die in de les aan de orde komen. In de achtergrondtekst wordt ook beschreven hoe de gefilmde les verliep. Die beschrijving van de gefilmde les is kort gehouden, maar geeft je houvast als je daarna de video-opnamen gaat bekijken. De teksten op deze pagina's zijn vaak bewerkingen van artikelen die eerder in het vakblad *Volgens Bartjens* zijn verschenen.

Na deze algemene beschrijving volgt een concreet lesplan. Dit is de beschrijving die je kunt gebruiken als je de les zelf gaat geven. Door de aard van de lessen zul je overigens regelmatig wat moeten improviseren, omdat de inbreng en oplossingsstrategieën van leerlingen vooraf niet volledig te voorspellen zijn. Voor een klein aantal lessen hebben we alleen een lesplan opgenomen. Het gaat om lessen die niet veel extra toelichting nodig hebben en waarvan ook geen video-opnamen zijn. Deze lessen kun je bijvoorbeeld gebruiken als vervolg op een eerdere les.

De lesplannen in dit boek hebben een vaste structuur waarin de fasen van de les worden beschreven:
- Het probleem neerzetten
- In tweetallen
- Tussentijdse bespreking
- Bespreking en reflectie

In de volgende paragrafen bespreken we deze fasen afzonderlijk.

Het probleem neerzetten
De meeste lessen in dit boek gaan over een probleem dat speelt binnen een context uit het dagelijks leven. Je begint zo'n les met het schetsen van de situatie. Vaak kun je daar een persoonlijke draai aan geven door te vertellen dat je zelf iets bent tegengekomen, of dat iemand in je omgeving met een bepaald probleem zat. Neem de tijd voor het introduceren van die context. Het is een manier om de voorkennis van de leerlingen te activeren, en om hen mee te nemen in het zoeken naar een oplossing. Als je de video-opnamen van de lessen bekijkt, zie je dat de introductie vaak 5 tot 10 minuten duurt. Dat lijkt misschien lang, maar je ziet in het vervolg van de lessen steeds dat het goed bestede tijd is: de leerlingen ervaren het probleem als een echt probleem, als een vraag waarop ze het antwoord willen weten.
Een van de lessen gaat bijvoorbeeld over het plan om een zwembad te bouwen, waarvoor een stukje van een park moet wijken. Er is een enquête geweest en de kranten hebben verschillende berichten geschreven over de uitkomst (*Krantentaal*, hoofdstuk 3). In plaats van direct die berichten op het digibord te zetten vraagt de leerkracht de leerlingen eerst om zelf redenen te bedenken waarom je voor of tegen de bouw van zo'n zwembad zou kunnen zijn.

Een ander voorbeeld is de les waarin leerlingen een plan moeten bedenken voor het meten van wat je de 'normale wandelsnelheid' zou kunnen noemen (*Wandelsnelheid*, hoofdstuk 5). De leerkracht begint met vertellen over een park in de buurt en vraagt dan of leerlingen weleens een bordje hebben gezien waarop staat dat een bepaalde wandelroute 60 minuten duurt. Hoe weten ze dat? In het gesprek daarover vertellen leerlingen over eigen ervaringen, maar ook komen er reacties als: 'Het ligt eraan hoe snel je loopt', 'Het gaat om gemiddelde snelheid' en 'Je kunt een verhoudingstabel gebruiken.'

Vaak komen er in zo'n eerste gesprek al meteen suggesties naar voren hoe je het probleem zou kunnen aanpakken. Wees niet bang dat daarmee de oplossing al verklapt wordt, want de andere leerlingen zullen zelf moeten bedenken of ze iets aan die suggesties hebben. Als ze zelf nog geen tijd hebben gehad om na te denken, negeren ze de eerste suggesties meestal.

Het neerzetten van het probleem sluit je als leerkracht af met het formuleren van een concrete onderzoeksopdracht. Het is goed om die opdracht op het digibord te zetten.

In tweetallen
Het is meestal handig om iedere leerling een werkblad te geven, ook wanneer leerlingen samenwerken. Loop rond terwijl ze aan het werk zijn en luister mee naar hun redeneringen. In eerste instantie volg je vooral; later kun je via gerichte vragen het denken van leerlingen in een bepaalde richting sturen.

Stimuleer leerlingen om op een vel papier hun berekeningen op te schrijven. Vraag hen om dat zo te doen dat andere leerlingen hun gedachtegang kunnen volgen.
De opdracht is: schrijf niet alleen het antwoord op, maar werk ook de weg ernaartoe uit, netjes op papier, met correcte rekentaal en een duidelijke redenering. Je vraagt de leerlingen hiermee in feite een miniposter te maken. Zo oefenen ze hun reken-wiskundige taalgebruik en leren ze hun gedachten helder te verwoorden.

Wacht niet te lang met de tussentijdse bespreking: na ongeveer 5 minuten onderling overleg zijn er meestal voldoende ideeën bedacht. Door deze te inventariseren kun je nagaan of iedereen een ingang heeft gevonden.

Tussentijdse bespreking
De eerste vraag waarover leerlingen moeten nadenken, zal zijn: snap ik eigenlijk wel wat het probleem is? In de praktijk zijn er altijd wel een paar leerlingen die niet weten hoe ze moeten beginnen. We hebben daarom in elke lesbeschrijving opgenomen dat het goed is om na ongeveer 5 minuten met een kort klassikaal gesprek te controleren of iedereen aan de slag is gegaan. Stel vragen als: 'Weet je wat het probleem is dat je moet oplossen?' en 'Heb je al een idee hoe je het gaat aanpakken?' Ga nog niet echt in op de suggesties waarmee leerlingen komen. Vaak kun je er wel een algemene tip van maken voor de andere leerlingen: 'Denk eens aan ...'
Ook echt verkeerde zijwegen kunnen kort besproken worden, zodat iedereen daarna in de juiste richting kan werken.

Afhankelijk van de situatie kun je het werken in tweetallen vaker dan één keer onderbreken voor een tussentijdse bespreking. Dat doe je bijvoorbeeld als je merkt dat veel leerlingen tegen hetzelfde probleem aanlopen. Soms ook moet je het werken in tweetallen onderbreken voor een vervolgvraag. Een voorbeeld is de les *Hoe groot is het papier?* (hoofdstuk 5) waarin de leerlingen eerst gaan meten hoe vaak een blaadje van 1 dm^2 op een vel A4 past, waarna de vraag wordt aangescherpt met: hoeveel cm^2 is de rand die overblijft, en wat is dan het totaal in cm^2?

Bespreking
In de nabespreking is het de bedoeling dat de groep als geheel toewerkt naar een conclusie of een inzicht. Als leerkracht ben

je opnieuw de gespreksleider. Je helpt de leerlingen om hun ideeën en oplossingen te presenteren en met elkaar te vergelijken. Je neemt niet het oplossen van het probleem van de leerlingen over, maar geeft hun zoveel mogelijk de ruimte om zelf te vertellen wat ze hebben bedacht.

Tegelijkertijd ben jij als leerkracht degene die dit proces begeleidt. Jij weet welke discussie je wilt stimuleren, omdat je het doel van de les goed kent. Je stuurt het gesprek onder andere door gerichte vragen te stellen en zorgvuldig te kiezen welke aanpakken en oplossingen je klassikaal bespreekt en in welke volgorde.

Die volgorde is belangrijk. Een voorbeeld is de les over het probleem van *34 tennisballen* (hoofdstuk 2). Een van de leerlingen heeft een heel elegante oplossing gevonden, maar dat moet dus niet de leerling zijn die je bij de bespreking meteen naar het bord haalt. Alle andere leerlingen hebben veel moeite gehad met het probleem en hebben vaak via trial-and-error een oplossing gevonden. Door eerst hun aanpakken te bespreken erken je hun denkwerk en sluit je beter aan bij wat voor de meerderheid herkenbaar is. Daarna kan de meer efficiënte oplossing worden verkend. Vaak ontstaat dan het inzicht: o ja, zo kan het ook.

De nabespreking is daarmee het moment waarop leerlingen leren om oplossingen te vergelijken en te beoordelen. Je kunt dit gesprek op gang brengen door leerlingen op elkaars aanpak te laten reageren: ‘Wie heeft dit op een andere manier gedaan?’ of ‘Welke aanpak vind je het meest duidelijk en waarom?’

Als gespreksleider kun je de discussie sterk sturen. Dat doe je dan niet door jouw ideeen te vertellen, maar door vragen te stellen. Als leerlingen bijvoorbeeld met een foute redenering komen, kun je reageren met: ‘Hé, klopt dat wel?’ en dan andere leerlingen naar hun mening vragen.

Bij de afsluiting van de les gaat het erom dat de klas samen een helder beeld krijgt van wat er ontdekt of geleerd is en dat leerlingen terugkijken op hun eigen redeneringen en die van anderen.

Presenteren, posters
Als je foto’s maakt van het werk van leerlingen, kun je deze op het digibord laten zien en de leerlingen vragen hun aanpak toe te lichten. In de klassikale bespreking is er meestal tijd voor slechts twee of drie presentaties, dus kies zorgvuldig wie je een beurt geeft. Dat niet iedereen een presentatie kan geven, is geen probleem, want tijdens het rondlopen heb je waarschijnlijk al met alle tweetallen korte gesprekken gehad.

Soms is het de moeite waard om de groepjes een grote poster te laten maken. Ze werken dan bij voorkeur eerst op een gewoon vel A4 en maken vandaaruit een definitieve poster op groter formaat. Voorbeelden zijn de posters die de leerkrachten lieten maken bij de lessen *De breukenstroken van de bakker* en *Mikken* (hoofdstuk 3). Het maken van zo’n poster kost tijd, en een consequentie is vaak dat er meestal een tweede les nodig is om die posters te bespreken. Als het om essentiële inzichten gaat, is zo’n tweede les echter goed besteed.
In zo’n tweede les kun je bijvoorbeeld beginnen met alle posters uit te stallen en de leerlingen te vragen om daar op briefjes, bijvoorbeeld grote post-its, hun commentaar bij te laten schrijven. Cathy Fosnot spreekt in dat verband van een *Gallery Walk*, alsof je in een kunstgalerij de verschillende werken naloopt.[3]

Afsluitende reflectie
Het is goed om aan het eind van de les leerlingen te laten vertellen wat ze van het werken aan het probleem geleerd hebben. Onze ervaring is dat leerlingen dit reflecteren echt moeten leren. Vaak noemen ze allerlei kleine dingen, terwijl de onderliggende wiskundige ideeën onbenoemd blijven.

Je kunt de reflectie verdiepen door vragen te stellen als: ‘Wat hielp jou om verder te komen?’, ‘Welke aanpak vond je handig?’ of ‘Wat heb je ontdekt over dit soort problemen?’ Dit helpt leerlingen om niet alleen terug te kijken op *wat ze* deden, maar ook op *waarom* het werkte.

Als leerlingen er zelf niet mee komen, kun je natuurlijk ook zelf benoemen waar het vooral om ging in deze les.

Reken-wiskundetaal
In de lessen worden leerlingen steeds gevraagd om hun redeneringen actief te verwoorden, met de juiste reken-wiskundige termen. Daarom bevat elk lesplan een lijstje met kernbegrippen die in de les centraal staan. Wanneer je als leerkracht consequent de reken-wiskundige begrippen gebruikt – zoals ‘verhouding’, ‘kijklijn’, ‘schaal’, ‘grootheid’ of ‘schatten’ – stimuleer je leerlingen om een ruime woordenschat voor hun denken te ontwikkelen. Dit helpt hen om hun ideeën helder te verwoorden, de redeneringen van anderen te volgen en hun eigen begrip van rekenen-wiskunde te verdiepen. Vraag bijvoorbeeld: ‘Welke verhouding zie je hier?’ of ‘Hoe kies je de schaal voor deze grafiek?’ Gebruik zelf consequent de juiste termen en vat antwoorden van leerlingen samen in correcte wiskundige taal. Leg verbindingen met eerder bekende begrippen, moedig leerlingen aan elkaars uitleg te volgen en stel vragen waarin de reken-wiskundige termen terugkomen.
De lesplannen beschrijven hoe je dit kunt doen. Telkens wordt concreet aangegeven hoe de begrippen bij de activiteiten ingezet kunnen worden; ze zijn daarbij vetgedrukt. Zo kan reken-wiskundetaal een vanzelfsprekend onderdeel worden van hun denken en hun taalgebruik.

Indeling in hoofdstukken
Dit boek biedt 26 lessen met open problemen voor groep 6, 7 en 8, overzichtelijk geordend per leerstofdomein. Omdat de lessen zich richten op de bovenbouw is er veel aandacht voor typische bovenbouwonderwerpen, zoals verhoudingen – waaronder breuken, procenten en kommagetallen – en grafieken. Daarnaast komen ook leerstofdomeinen aan bod die gedurende de hele basisschool belangrijk zijn, zoals hele getallen, meten en meetkunde. De indeling is als volgt:
- Hoofdstuk 2: Hele getallen (6 lessen)
- Hoofdstuk 3: Verhoudingen (7 lessen)
- Hoofdstuk 4: Grafieken (3 lessen)
- Hoofdstuk 5: Meten (5 lessen)
- Hoofdstuk 6: Meetkunde (5 lessen)

Elk hoofdstuk begint met een korte uiteenzetting van het leerstofdomein en een aantal belangrijke inzichten die daarbij horen. Daarna volgt een beknopte samenvatting van alle opgenomen lessen, zodat duidelijk wordt hoe die inzichten aan bod komen. Vervolgens worden alle lessen uitgewerkt in beschrijvingen en lesplannen. Binnen elk hoofdstuk zijn de lessen geordend in oplopende moeilijkheidsgraad. Dat moet echter relatief worden gezien: een les die wij voor groep 6 hebben ontworpen, kan ook in groep 8 nog zeer waardevol en uitdagend zijn.

Hoofdstuk 2

Hele getallen

In de bovenbouw van de basisschool speelt wiskundig probleemoplossen een steeds grotere rol. Het gaat hierbij om het redeneren over non-routineproblemen: opgaven waarvoor leerlingen geen standaardprocedure hebben geleerd. Wiskundig probleemoplossen vormt de kern van alle lessen in dit boek: in elke les worden leerlingen uitgedaagd om zelf een aanpak te zoeken, verschillende mogelijkheden te vergelijken en hun keuzes te beargumenteren.

In dit hoofdstuk richt dat probleemoplossen zich specifiek op het rekenen met hele getallen. Om de opgaven goed te kunnen aanpakken, is het belangrijk dat leerlingen de structuur van getallen begrijpen en zien hoe het decimale stelsel is opgebouwd. In de bovenbouw werken zij met grotere getallen en leren ze om meerdere bewerkingen tegelijk te combineren. Juist bij het oplossen van zulke problemen wordt duidelijk hoe belangrijk getalinzicht is. Met dit inzicht kunnen leerlingen contextopgaven betekenisvol aanpakken: ze vertalen een concrete situatie naar een berekening en koppelen de uitkomst weer terug naar de context.

Een ander belangrijk doel in de bovenbouw is dat leerlingen flexibel met getallen leren omgaan. Naast het oefenen van standaardprocedures is er daarom veel aandacht voor schatten of globaal rekenen. In dit hoofdstuk gebruiken we beide termen door elkaar. ‘Schatten’ is het meest gangbaar, maar kan bij leerlingen de indruk wekken dat het om gokken gaat. De term ‘globaal rekenen’ benadrukt dat het gaat om bewust rekenen met afgeronde getallen en om het ontwikkelen van gevoel voor de grootte van uitkomsten.

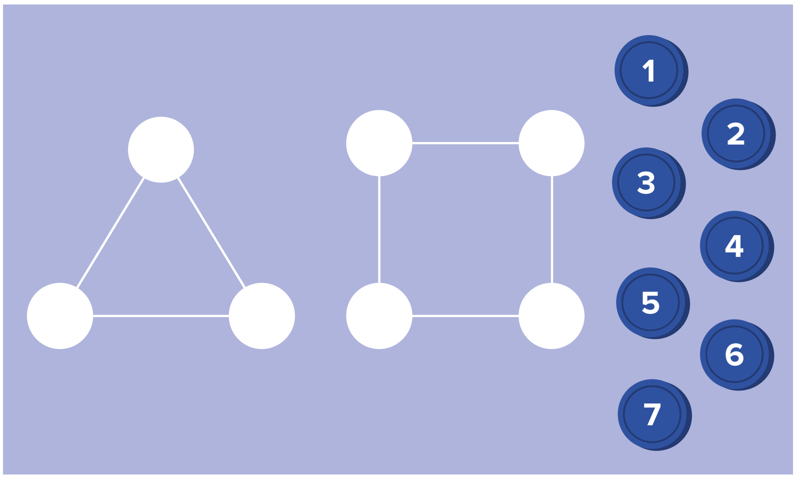
Al deze aspecten – wiskundig probleemoplossen, werken met contextopgaven en flexibel en globaal rekenen – komen samen in de zes lessen van dit hoofdstuk:

In de les *Het grootste en kleinste verschil* staat de positiewaarde van cijfers binnen een getal centraal. De eerste opdracht is om van vier cijfers – bijvoorbeeld 1, 2, 3 en 4 – twee getallen te maken die een zo *groot* mogelijk verschil hebben. Dat is waarschijnlijk niet een heel lastige vraag, maar de volgende opdracht – maak twee getallen die een zo *klein* mogelijk verschil hebben – is veel moeilijker.

In de les *Spelen met getallen* buigen leerlingen zich over een Duits spel, ZaLogo[4], dat bestaat uit een groot aantal cijferpuzzels. Afbeelding 2.1 laat hiervan een voorbeeld zien. Aan de hand van dit soort puzzels ervaren leerlingen dat het vaak helpt om gewoon te beginnen en mogelijkheden uit te proberen. In eerste instantie vinden ze meestal vrij gemakkelijk een oplossing. Bij het vergelijken van oplossingen blijkt echter dat er meer dan één juiste oplossing is. Daarmee ontstaat de echte uitdaging: hoeveel mogelijke oplossingen zijn er eigenlijk? Leerlingen ontdekken dat dit vraagt om een systematische aanpak, waarbij ze mogelijke cijfercombinaties verkennen en ordenen.

De les *34 tennisballen* gaat over tennisballen die worden verkocht in kokers van 3 en van 4 stuks. In totaal zijn er 10 kokers verkocht met samen 34 tennisballen. De vraag is hoeveel kokers van elke soort dat zijn. Ook hier zorgt het uitproberen van enkele getallen voor een goede start. De eerste poging levert meestal nog niet de juiste oplossing op, maar brengt

▼ Afbeelding 2.1 Voorbeeld van een ZaLogo-opdracht: leg de getallen 1 tot en met 7 zo neer dat de som van de getallen in de driehoek en het vierkant gelijk is.



leerlingen wel op ideeën en helpt hen om het probleem verder te onderzoeken.

De les *Makkelijke sommen* gaat over het effect van schatten. De leerlingen rekenen met afgeronde getallen, maar ze moeten ook nadenken over wat er dan gebeurt met de uitkomst. Begrijpen ze bijvoorbeeld wat er gebeurt als je van 30 x 86 voor het gemak 30 x 90 maakt? Kom je dan te hoog uit of te laag en zal het verschil klein zijn of groot? Om leerlingen steun te bieden bij het nadenken hierover wordt in de les het rechthoekmodel gebruikt.

De les *Schatten of het klopt* gaat over een krantenbericht waarbij leerlingen, zonder ingewikkeld rekenwerk, kunnen beredeneren dat er met een van de getallen een fout moet zijn gemaakt. In deze les staat het redeneren voorop: hoe rond je de gegeven getallen handig af in plaats van precies te rekenen met de onhandige getallen uit het bericht? Schatten speelt daarbij een belangrijke rol en is essentieel voor het kritisch omgaan met informatie. De les stimuleert het ontwikkelen van een wiskundige attitude, waarbij leerlingen leren om uitspraken op hun aannemelijkheid te beoordelen.

De les *Delen met rest* gaat over het interpreteren van een berekening, dus over de relatie tussen het rekenwerk en de context. Een deelsom die een rest oplevert is een mooi onderwerp voor een discussie, want wat betekent die rest in een bepaalde situatie? Dezelfde berekening kan binnen verschillende situaties tot een ander antwoord leiden. In deze les gaat het in alle gevallen om 365 : 7, maar de situatie is steeds anders. Als het om geld gaat, kun je een bedrag tot op de cent nauwkeurig verdelen. Gaat het om het bestellen van minibusjes voor vervoer, dan betekent '52 rest 1' dat je een extra bus nodig hebt.

▲ Afbeelding 2.2 Makkelijke sommen

▲ Afbeelding 2.3 34 tennisballen

Les

Het grootste en kleinste verschil

Met vier cijfers kun je op verschillende manieren twee getallen maken. Hoe maak je het verschil tussen die getallen zo groot of zo klein mogelijk?

Groep 6, 7

De leerlingen weten inmiddels dat 85 een groter getal is dan 58, en ze weten ook waarom: de 8 in 85 staat voor 8 tientallen en dus voor 80, en de 5 in 58 staat maar voor 50. Bij de puzzelproblemen van deze les is de vraag hoe je slim gebruik kunt maken van de positiewaarde van cijfers. Lees niet meteen door, maar probeer eerst zelf antwoorden te vinden bij het volgende probleem.

> **1 2 3 4**
>
> Maak met de cijfers 1, 2, 3 en 4 twee getallen. Elk cijfer mag één keer worden gebruikt. Bereken het verschil tussen die twee getallen.
> - Wat is het grootste verschil dat je zo kunt maken?
> - Wat is het kleinste verschil dat je kunt maken?

Met cijfers getallen maken

Eerst het grootste verschil. Je kunt met de gegeven cijfers bijvoorbeeld de getallen 12 en 34 maken, maar je beseft al gauw dat je het grote getal zo groot mogelijk wilt maken en het kleine getal zo klein mogelijk. 12 en 43 dan? Een prima keuze, totdat je beseft dat de twee getallen niet evenveel cijfers hoeven te hebben. Het grootste verschil is nu gauw gevonden: 432 en 1.

Kijk even naar wat je gedaan hebt. Het hoogste cijfer is in het grootste getal gestopt, en op zo'n manier dat het ook het meest effect heeft, want die 4 is nu 400 waard. De 3 kan dan het best op de tweede plaats staan, want daar is hij 30 waard.

De tweede vraag is complexer. Waarschijnlijk bedenk je dat je nu wel getallen van twee cijfers moet maken; je zoekt immers naar getallen die dicht bij elkaar liggen. Volgende stap: kies dan ook tientallen die zo dicht mogelijk bij elkaar liggen. Bij de gegeven cijfers heb je veel keus: 1 en 2, 2 en 3, of 4 en 3. Te veel keus? Denk dan eens na over de eenheden. De twee getallen komen het dichtst bij elkaar met een laag eenhedencijfer in het grootste getal en een hoog eenhedencijfer in het laagste getal. Conclusie: 31 en 24, met een verschil van 7.

Maar pas op, vat deze uitleg bij de twee opgaven niet op als een voorbeeld voor je onderwijs. We namen je als lezer mee in een redenering die leidde tot een elegante oplossing, in stappen die je waarschijnlijk heel goed kon volgen. In de klas zou dit echter voorzeggen zijn.

Als je zelf hebt geprobeerd om een antwoord te vinden, heb je ongetwijfeld veel meer geleerd. Elke redeneerstap die je maakte was in dat geval een eigen ontdekking, en eigen ontdekkingen blijven hangen. Reageren met 'o ja' bij de redenering van een ander leidt tot een veel vluchtiger begrip.

In de les krijgen de leerlingen vier keer hetzelfde puzzelprobleem voorgelegd, steeds met een andere set van cijfers. Na (1-2-3-4) volgen (3-4-5-6), (1-4-7-9) en (1-4-8-9). Het idee daarachter is dat de leerlingen al doende, stapje voor stapje, tot betere redeneringen komen.

Grootste en kleinste verschil, groep 6

Leerkracht Arjan Haak liet zijn leerlingen uit groep 6 in tweetallen samenwerken. In het begin bestond hun aanpak vooral uit het vrij willekeurig maken van getallen en het berekenen van het verschil, net zolang tot zij dachten het juiste antwoord te hebben gevonden. Bij het vergelijken van de antwoorden vroeg de leerkracht steeds om uitleg, maar hij gaf zelf geen commentaar. Dat was ook niet nodig: door de opmerkingen van andere leerlingen ontdekten steeds meer kinderen de onderliggende regels.

Bij de vraag naar het grootste verschil kwamen de leerlingen aanvankelijk alleen met getallen van twee cijfers, totdat Tygo '3142' als antwoord noemde. Dat is natuurlijk maar één getal en telt dus niet. Daarna kwam Nina met 1 en 234. Later,

Het grootste en
kleinste verschil

toen de leerlingen een tijd zelfstandig hadden gezocht, presenteerde een groepje de getallen 1 en 432. Uit de bespreking van de andere cijferreeksen bleek dat de meeste leerlingen begrepen wat bij de vraag naar het grootste verschil de juiste aanpak is.
Ook de regels voor het vinden van het kleinste verschil kwamen tijdens de bespreking naar voren, maar het blijft de vraag of iedereen uiteindelijk ook echt begreep hoe je daarbij altijd tot de beste oplossing komt.
Is dat laatste een bezwaar? Een leerkracht kan dit soort puzzels best twee of drie keer met de klas doen. Waarschijnlijk zullen de leerlingen de regels dan steeds explicieter kunnen formuleren en dat is eigenlijk belangrijker dan het vinden van de juiste getallen.

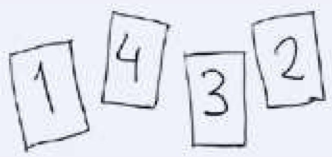
Een serie vergelijkbare opdrachten
Zoals gezegd krijgen de leerlingen in de les vier keer een puzzelprobleem voorgelegd, telkens met een andere set cijfers. Het aantrekkelijke daarvan is dat je als leerkracht terughoudend kunt zijn met commentaar, omdat er altijd wel leerlingen zijn die met iets nuttigs komen. Je kunt als leerkracht dan volstaan met opmerkingen als: ‘Hé, daar zegt Naomi iets interessants. Denk daar eens even over na.’

LESPLAN

Het grootste en het kleinste verschil

Redeneren over positiewaarde

Groep 6, 7



Reken-wiskundetaal

- cijfer
- getal
- verschil
- bewijs
- positiewaarde

De leerlingen maken met vier gegeven cijfers op verschillende manieren twee getallen. Hoe maak je het verschil tussen die getallen zo groot mogelijk? En lastiger: hoe maak je het zo klein mogelijk?

Materiaal

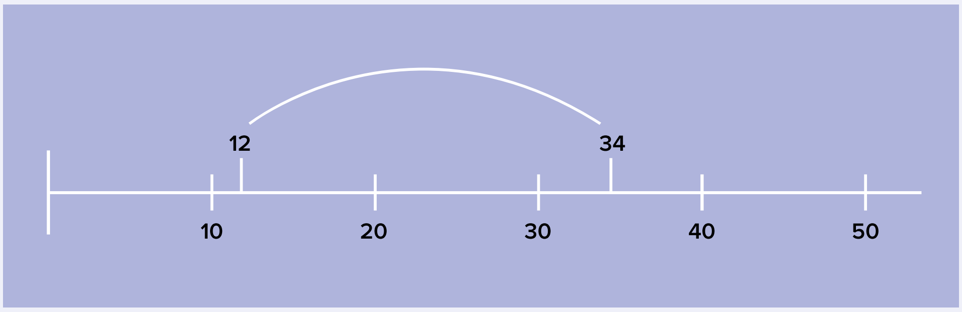
- Papier voor het zoeken naar oplossingen

Inzichten

De leerlingen gaan begrijpen hoe ze de positie van cijfers in een getal (positiewaarde) kunnen gebruiken om getallen te maken met een groot of juist klein verschil.

Het probleem neerzetten

- Teken vier kaartjes op het bord, met de **cijfers** 1, 2, 3 en 4. Vraag leerlingen om met die cijfers twee **getallen** te maken. (Voorbeelden: 12 en 34, 41 en 23, maar ook 123 en 4, 413 en 2.)
- Vraag de leerlingen om uit te rekenen wat het **verschil** is tussen de twee gevonden getallen. Teken eventueel een getallenlijn op het bord om het verschil te illustreren.



- Schrijf de eerste onderzoeksopdracht op het bord: **Maak met de cijfers twee getallen met een zo groot mogelijk verschil.**
- Laat de leerlingen in tweetallen een antwoord bedenken en opschrijven.
- Inventariseer de antwoorden en laat leerlingen kort uitleggen waarom ze die getallen kozen, maar ga er nog niet uitgebreid op in. Dat gesprek komt later, wanneer de leerlingen in tweetallen andere opgaven hebben gedaan.
- Schrijf de tweede onderzoeksopdracht op het bord: **Maak nu twee getallen met een zo klein mogelijk verschil.**
- Inventariseer de antwoorden en vraag om een uitleg, maar ga ook hier nog niet uitgebreid op in.

In tweetallen, met tussentijdse bespreking

- Als vervolg zoeken de leerlingen in tweetallen naar het grootste en kleinste verschil bij andere combinaties van getallen, bijvoorbeeld eerst 3-4-5-6, daarna 1-4-7-9 en 1-4-8-9.
- Loop rond en stimuleer leerlingen die via proberen een antwoord hebben gevonden om na te denken over een systematische aanpak.
- Vraag bij elke set getallen na een aantal minuten om antwoorden. Laat leerlingen reageren als ze een ander antwoord hebben gevonden waarvan het verschil nog groter of kleiner is.

- Vraag: ‘Hebben jullie echt het allergrootste of allerkleinste verschil gevonden? Hoe weet je dat zeker?’ Benadruk dat het hier gaat om het **bewijs**: om het zeker weten.
- Stuur het gesprek zo dat duidelijk wordt dat de **positiewaarde** – de plaats van een cijfer in een getal (eenheden, tientallen, honderdtallen) – van grote invloed is op het verschil.
- Door de tussentijdse besprekingen kunnen de leerlingen leren van elkaar en handige ideeën overnemen. Als het goed is, wordt in de loop van de les steeds duidelijker dat je kunt redeneren in plaats van proberen.

Bespreking en reflectie

- In de loop van de les zal steeds duidelijker worden hoe je de opdrachten kunt aanpakken. We nemen als voorbeeld de cijfers 1-4-7-9.
  - Een redenering bij de vraag naar het grootste verschil: je moet een getal van drie cijfers maken en een getal van één cijfer, want dat geeft sowieso een groot verschil. Maak dan het getal van drie cijfers zo groot mogelijk, en dus het andere getal klein. 974 en 1 is de oplossing, want in 974 zorgt het hoogste cijfer 9 voor het maximale aantal honderdtallen en 7 voor het maximale aantal tientallen.
  - Een redenering bij de vraag naar het kleinste verschil: kies voor de tientallen twee cijfers die zo dicht mogelijk bij elkaar liggen. Bij dit voorbeeld zijn dat 7 en 9, verschil is 2. Er blijven twee cijfers over; maak het grote getal zo klein mogelijk, dan wordt ook het kleine getal zo groot mogelijk. De getallen zijn 91 en 74.
- Verdieping: misschien kunnen sommige leerlingen ook nog bedenken wat je – bij het zoeken naar het kleinste verschil – kunt doen als de cijfers even dicht bij elkaar liggen. Zo kies je bij 3, 4, 5, 6 het best 4 en 5 als tientallen, omdat 3 en 6 het verst uit elkaar liggen. Dan krijg je 53 - 46 = 7.
- Sluit de les af door leerlingen te laten verwoorden waarom nadenken over de positiewaarde zo belangrijk is bij het bepalen van het grootste en kleinste verschil.

Les

Spelen met getallen

Een rijke rekenles heeft niet altijd een verhaal nodig. In deze les puzzelen de leerlingen met fiches waarop de getallen 1 tot en met 9 staan.

Groep 6, 7, 8

ZaLogo is een Duits spel dat bestaat uit fiches met de getallen 1 tot en met 9, plus 96 kaarten met getalpuzzels. Bij de vier puzzelproblemen die we gebruiken in de les moet je de fiches zo neerleggen dat de met elkaar verbonden getallen opgeteld dezelfde uitkomst opleveren. Als je het zonder fiches doet: elk getal mag maar één keer voorkomen.

Alle oplossingen vinden

Bij opgave 1 en 2 is er meer dan één oplossing mogelijk, en dat is waar het interessant wordt. De eerste oplossing vinden kinderen vaak door simpelweg wat te proberen, maar hoe vind je meer dan één oplossing? En kun je de oplossingen zo ordenen dat je zeker weet dat je ze allemaal hebt? Opgave 1 heeft vier oplossingen, opgave 2 heeft er zes.

De vraag bedenken

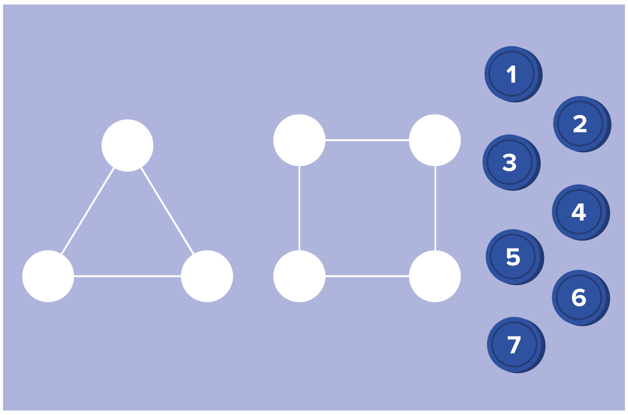
Bij de bloem van opgave 3 is de situatie omgedraaid. De oplossing is al gegeven, want er staan op alle plekken al getallen. Nu is de opgave: bedenk een vraag die erbij zou kunnen horen.

Vanuit proberen

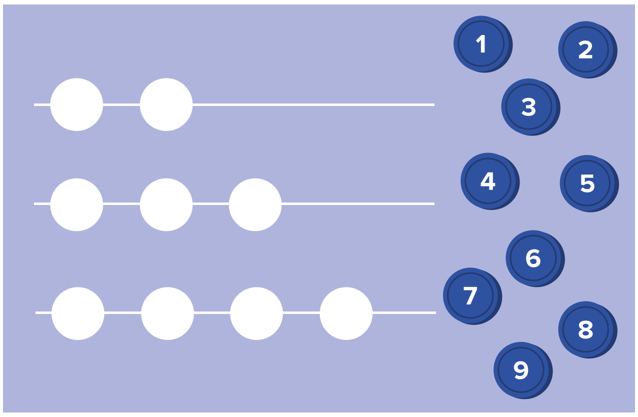
Pabodocente Femke Keers gaf deze les in groep 7 op de school waar ze tot voor kort zelf leerkracht was.

Via schuiven en proberen vinden de leerlingen al snel een heleboel oplossingen voor opgave 1. Bij de driehoek en het vierkant moet de som allebei 14 zijn, dat hebben de leerlingen snel door. Je vindt dat door alle getallen bij elkaar op te tellen en dan het totaal door twee te delen. Bij de tweede opgave passen sommige tweetallen dat idee direct toe. Het gaat om de getallen 1 t/m 9 en die zijn samen 45. De som van elke regel moet dus 15 worden. Niet alle kinderen beginnen echter zo. Geethika en Sam proberen eerst 14 als totaal – het getal van de vorige opgave – en komen pas via proberen uit op rijtjes van 15.

Ook voor die tweede opgave komen er een heleboel oplossingen op het digibord. Het blijken er zes te zijn. Als de leerkracht vraagt: ‘Hoe weet je nou dat het er ook zes kunnen zijn?’, zegt Robin dat er bovenaan maar twee mogelijkheden zijn: 7 en 8, of 9 en 6. Ilia zegt dat er voor de tweede rij dan zes mogelijkheden zijn. De leerkracht laat die mogelijkheden niet allemaal uitschrijven, maar vraagt wel of je dan ook al wat weet over de derde regel. Daar leg je dan de overgebleven getallen neer, zegt Olivier.

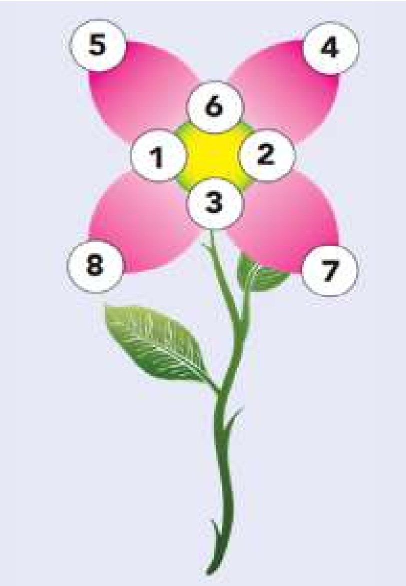


▲ Opgave 1: Leg de getallen 1 t/m 7 zo neer dat de som van de getallen in de driehoek en het vierkant gelijk is.



▲ Opgave 2: Leg de getallen 1 t/m 9 zo neer dat de som van de getallen op elke lijn gelijk is.

Spelen met getallen



▲ Opgave 3: Kijk naar de puzzel met de bloem. Hij is al opgelost. Maar welke opdracht stond erbij? Schrijf het onder de bloem. Denk goed na over de formulering.

Bij de derde opdracht formuleren de leerlingen niet altijd een duidelijke vraag, maar ze ontdekken wel van alles:
- De getallen op de punten van de bloemblaadjes zijn samen 24, de getallen binnenin samen 12.
- De getallen op elk blaadje zijn samen steeds 12.
- Niet alleen de drie getallen op de blaadjes zijn samen steeds 12, ook de vier getallen in het midden zijn samen 12.

Een systematische aanpak

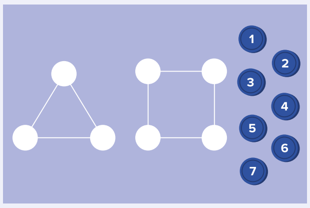
De ZaLogo-opdrachten kunnen worden gezien als *low-floor-high-ceiling*-problemen, in de terminologie van Jo Boaler.[5] Dit betekent dat de instap laag is (*low floor*): iedere leerling kan beginnen door te experimenteren en oplossingen uit te proberen. Tegelijkertijd dagen de opgaven de leerlingen uit tot redeneringen van een hoger niveau, zoals het ontwikkelen van een systematische aanpak (*high ceiling*). Daarbij staan vragen centraal als: ‘Hoe vind je alle oplossingen?’, ‘Kan het ook anders?’ en ‘Hoe weet je zeker dat je niets over het hoofd ziet?’
De kracht van dit soort puzzels is dat iedere leerling één of meer oplossingen kan vinden, wat leidt tot enthousiasme en betrokkenheid. Bovendien stimuleren deze opdrachten een onderzoekende wiskundige houding: leerlingen leren zichzelf vragen te stellen, verschillende mogelijkheden te verkennen en kritisch te reflecteren op hun eigen aanpak. Daarmee vormen de puzzels een rijke activiteit waarin zowel wiskundig denken als een onderzoekende houding centraal staat.[6]

LESPLAN

Spelen met getallen

Wiskundig redeneren met kleine getallen

Groep 6, 7, 8



▲ Leg de getallen 1 t/m 7 zo neer dat de som van de getallen in de driehoek en het vierkant gelijk is.

Reken-wiskundetaal

- som
- systematisch

De leerlingen lossen een getallenpuzzel op. Door te schuiven met getalfiches zullen de meeste leerlingen bij de afgebeelde puzzel al proberend vrij gauw een oplossing vinden, maar daarna begint het echte denkwerk. De ogenschijnlijk eenvoudige puzzel blijkt dan opeens een rijk probleem, want hoeveel verschillende oplossingen zijn er eigenlijk? En wanneer zijn twee oplossingen verschillend en wanneer zijn ze gelijk? Dit vraagt om systematisch zoeken van mogelijke oplossingen. Het lesidee is gebaseerd op het spel ZaLogo, uitgegeven door Friedrich Verlag.

Materiaal

- Voor elk tweetal het werkblad (zie website)
- Op het digibord de afbeeldingen van de getalpuzzels (zie de powerpoint op website)
- Voor elk tweetal 9 getalfiches. Maak sets door de getallen op fiches of op doppen van melkpakken te schrijven, of druk het knipblad af (zie website)

Inzichten

De leerlingen gaan begrijpen dat:

- De exacte plaats van de getallen binnen een figuur niet van belang is; het gaat erom welke getallen je combineert.
- De vereiste som van de getallen per figuur niet gegeven is, maar vooraf kan worden berekend.
- Je door systematisch combinaties te verkennen alle mogelijke oplossingen kunt vinden.

Het probleem neerzetten

- Laat de eerste puzzel zien. Bespreek de tekst die eronder staat: *Leg de getallen 1 tot en met 7 zo neer dat de som van de getallen in de driehoek en het vierkant gelijk is*. Bespreek de betekenis van het woord **'som'**: hier wordt de uitkomst van de optelling bedoeld.
- Deel de getalfiches en werkbladen uit – één set per tweetal – en laat leerlingen zoeken naar een oplossing.
- Onderbreek na een paar minuten het werk en inventariseer welke oplossingen er zijn gevonden. Bespreek de verschillen. Concludeer samen dat er blijkbaar meerdere oplossingen zijn. Dit roept de vraag op: hoeveel zijn er eigenlijk?
- Zet de onderzoeksopdracht op het bord: **Zoek alle mogelijke verschillende oplossingen.**

In tweetallen, puzzel 1

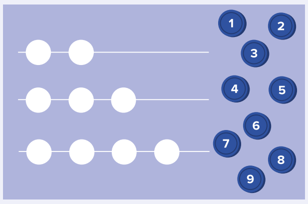
- De leerlingen proberen in tweetallen alle oplossingen te vinden. Ze noteren de gevonden oplossingen in symbolentaal op hun werkblad.
- Loop rond en vraag leerlingen of ze kunnen bewijzen dat ze alle oplossingen gevonden hebben.

Bespreking puzzel 1

- Noteer twee of drie oplossingen op het digibord. Het is handig om ze op hetzelfde scherm te zetten, zodat de leerlingen de oplossingen kunnen vergelijken.
- Laat de leerlingen aan de hand van deze oplossingen, of met behulp van dia 3 van de powerpoint, nadenken over wat 'verschillend' hier betekent. Bespreek de vraag: 'Zijn deze oplossingen echt verschillend of gebruiken ze dezelfde combinatie van getallen?' Trek samen de conclusie dat het om de combinatie van getallen gaat.
- Vestig de aandacht op het feit dat bij alle oplossingen de som van driehoek en vierkant 14 is. Vraag of de som van de getallen per figuur ook een ander getal zou kunnen zijn en laat leerlingen hun redenering toelichten. Waarschijnlijk concluderen zij dat je eerst alle getallen bij elkaar

kunt optellen. De totale som van de getallen 1 tot en met 7 is 28, en omdat deze over twee figuren wordt verdeeld, moet de som per figuur 14 zijn.

- Kom terug op de onderzoeksopdracht: hoeveel verschillende oplossingen zijn er? Maak de vraag preciezer door te vragen naar alle mogelijke getallencombinaties waarmee je 14 kunt maken in de driehoek. Vraag waarom je alleen naar de driehoek hoeft te kijken. Als die 14 als som heeft, zijn de overblijvende getallen voor het vierkant ook samen 14.
- Inventariseer de verschillende combinaties. Voor de driehoek zijn er vier mogelijk: 7 + 6 + 1, 7 + 5 + 2, 7 + 4 + 3 en 6 + 5 + 3.
- Vraag hoe leerlingen naar combinaties hebben gezocht. Stel daarbij ook de vraag: ‘Kan het ook **systematisch**?’ Een systematische manier is dat je begint met het grootste getal – 7 – en daar andere getallen bij zoekt. Daarna begin je met 6; lagere getallen geven alleen maar combinaties die je al gehad hebt. De meeste leerlingen zullen het antwoord echter hebben gevonden via willekeurig uitproberen. Ook dat is prima. Het zoeken naar een meer systematische aanpak komt verder aan de orde bij de volgende opgave.
- Laat de tweede puzzel zien op het digibord en bespreek de opdracht: leg de getallen 1 t/m 9 zo neer dat de som van de getallen op elke lijn gelijk is.
- Zet opnieuw de onderzoeksopdracht op het bord: **Zoek alle mogelijke verschillende oplossingen.**



▲ Leg de getallen 1 t/m 9 zo neer dat de som van de getallen op elke lijn gelijk is.

In tweetallen, puzzel 2

- De leerlingen proberen in tweetallen alle oplossingen te vinden. Ze noteren de gevonden oplossingen in symbolentaal op hun werkblad.
- Loop rond en stimuleer leerlingen die via proberen een antwoord hebben gevonden om na te denken over een systematische aanpak.

Bespreking puzzel 2 en reflectie

- Bespreek een aantal oplossingen. Ga weer de verschillende mogelijke ontdekkingen na. Vraag:
  - Waarom maakt het niet uit in welke volgorde je de getallen zet op elke lijn?
  - Hoe had je al vooraf kunnen weten dat de som op elke lijn 15 moet worden?
  - Hoeveel mogelijke oplossingen zijn er? En hoe weet je zeker dat je alle oplossingen gevonden hebt? Waarschijnlijk zullen leerlingen zeggen dat op de eerste lijn van twee getallen alleen 9 en 6, of 8 en 7 mogelijk is. Laat hen van daaruit verder zoeken naar combinaties voor de tweede lijn met de overgebleven getallen.
- Bespreek vervolgens een systematische aanpak. Laat zien hoe je het zoeken kunt ordenen:
  - Onderzoek eerst welke combinaties in de eerste twee lijnen samen 15 vormen; de vier overblijvende getallen zijn dan automatisch ook samen 15.
  - Op de eerste lijn zijn de combinaties 9 + 6 en 8 + 7 mogelijk.
  - Bij 9 + 6 passen de combinaties 8 + 5 + 2 en 8 + 4 + 3.
  - Bij 8 + 7 past de combinatie 6 + 5 + 4.
- Vraag of je ook zou kunnen beginnen met de lijn onderaan, vier getallen die samen 15 zijn. Concludeer met de leerlingen dat je dan veel mogelijkheden krijgt en dan misschien niet de goede getallen overhoudt voor bovenaan.
- Sluit de les af door leerlingen te laten verwoorden welke manier van zoeken hen heeft geholpen om alle mogelijke oplossingen te vinden.

Extra

- Bij de puzzel met de bloem is de oplossing al gegeven. Laat de leerlingen bedenken welke opdracht erbij hoort. Een mogelijk antwoord is: leg de getallen 1 tot en met 8 zo neer dat de som van de getallen in elk bloemblaadje en het hart gelijk is.
- Laat de leerlingen een eigen puzzel ontwerpen: ze leggen de getallen in een mooi patroon neer en formuleren er een opdracht bij. De oplossing noteren ze voor zichzelf in symbolentaal op een apart blaadje en dan laten ze een klasgenoot de puzzel oplossen.

«